ILG‘OR IQTISODIYOT VA PEDAGOGIK TEXNOLOGIYALAR
ILMIY ELEKTRON JURNAL

UO‘K: 338,339.1

O’ZINI O’ZI TASHKIL ETUVCHI SAVDO TIZIMIDA ITO STOXASTIK DIFFERENSIAL TENGLAMA ORQALI INVESTITSIYA OQIMINI OPTIMALLASHTIRISH

PhD ***Abdullaev Ulmas***
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi
Qoraqalpog‘iston bo‘limi Qoraqalpog‘iston Tabiiy fanlar ilmiy-tadqiqot instituti
ORCID: 0000-0002-3379-9969
abdullaev.ulmas@mail.ru
Jaksilikova Xurliman
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi
Qoraqalpog‘iston bo‘limi Qoraqalpog‘iston Tabiiy fanlar ilmiy-tadqiqot instituti
ORCID: 0009-0002-8589-6530
hurlimanzhaksylykova@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada o‘zini o‘zi tashkil etuvchi savdo tizimida investitsiya oqimini optimallashirish masalasi tahlil qilinadi. Matematik jihatdan stoxastik hisob apparati, xususan, ITO stoxastik differensial tenglamalari qo‘llanilgan. Savdo tizimi tashqi iqtisodiy jarayonlarga moslasha oladigan o‘zini o‘zi tashkil etuvchi tuzilma sifatida modellashtirilgan. Gronwall-Bellman tenglamasi asosida investitsiyalarni optimal taqsimlash trayektoriyasini aniqlash imkonini beruvchi matematik model taklif etilgan. Olingan natijalar iqtisodiy tizimlarni prognozlash, resurslarni optimal taqsimlash va bozor strategiyalarini ishlab chiqishda muhim ahamiyat kasb etadi.*

Kalit so‘zlar: *investitsiya oqimi, stoxastik differensial tenglamalar, ITO tenglamasi, o‘z-o‘zini tashkil etuvchi tizimlar, Gronwall-Bellman tenglamasi, iqtisodiy o‘sish.*

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОТОКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ITO В САМООРГАНИЗУЮЩЕЙСЯ ТОРГОВОЙ СИСТЕМЕ

PhD ***Абдуллаев Улмас***
Каракалпакский научно-исследовательский институт естественных наук
Каракалпакского отделения Академии наук Республики Узбекистан
Жаксылыкова Хурлиман
Каракалпакский научно-исследовательский институт естественных наук
Каракалпакского отделения Академии наук Республики Узбекистан

Аннотация. *В данной статье рассматривается задача оптимизации инвестиционных потоков в самоорганизующейся торговой системе. В качестве математического аппарата используется стохастическое исчисление, в частности стохастические дифференциальные уравнения Ито. Торговая система моделируется как самоорганизующаяся структура, способная адаптироваться к внешним экономическим процессам. На основе уравнения Гроноулла–Беллмана предложена математическая модель, позволяющая определить оптимальную траекторию распределения инвестиционных ресурсов. Полученные результаты имеют важное значение для прогнозирования экономических систем, оптимального распределения ресурсов и разработки рыночных стратегий.*

Ключевые слова: *инвестиционный поток, стохастические дифференциальные уравнения, уравнение Ито, самоорганизующиеся системы, уравнение Гроноулла–Беллмана, экономический рост.*

OPTIMIZATION OF INVESTMENT FLOWS THROUGH THE ITO STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION IN A SELF-ORGANIZING TRADING SYSTEM

PhD ***Abdullaev Ulmas***
Karakalpak Scientific Research Institute of Natural Sciences,
Karakalpakstan Branch of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan
Jaksilikova Xurliman
Karakalpak Scientific Research Institute of Natural Sciences,
Karakalpakstan Branch of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

Abstract. *This article analyzes the problem of optimizing investment flows in a self-organizing trading system. From a mathematical perspective, the apparatus of stochastic calculus, particularly Itô stochastic differential equations, is employed. The trading system is modeled as a self-organizing structure capable of adapting to external economic processes. Based on the Gronwall–Bellman equation, a mathematical model is proposed that enables the determination of the optimal trajectory for the allocation of investment resources. The obtained results are of significant importance for forecasting economic systems, optimizing resource allocation, and developing market strategies.*

Keywords: *investment flow, stochastic differential equations, ITO equation, self-organizing systems, Gronwall–Bellman equation, economic growth.*

Kirish.

Investitsiya oqimini maqsadli yo'nalsitirsh samaradorligi ko'pchilik hollarda, yangi ish o'rinlarining yaratilishi, xizmat ko'rsatish va savdo tizimida qisqa muddatli moslashuvchanlik bilan belgilanadi. Mahsulotni ishlab chiqarish jarayonidan boshlab eng oxirgi manzil hisoblangan foydalanuvchigacha bo'lgan barcha davrlarda iqtisodiy tizim o'zining bir qancha holatlarini moslashtirib boradi.

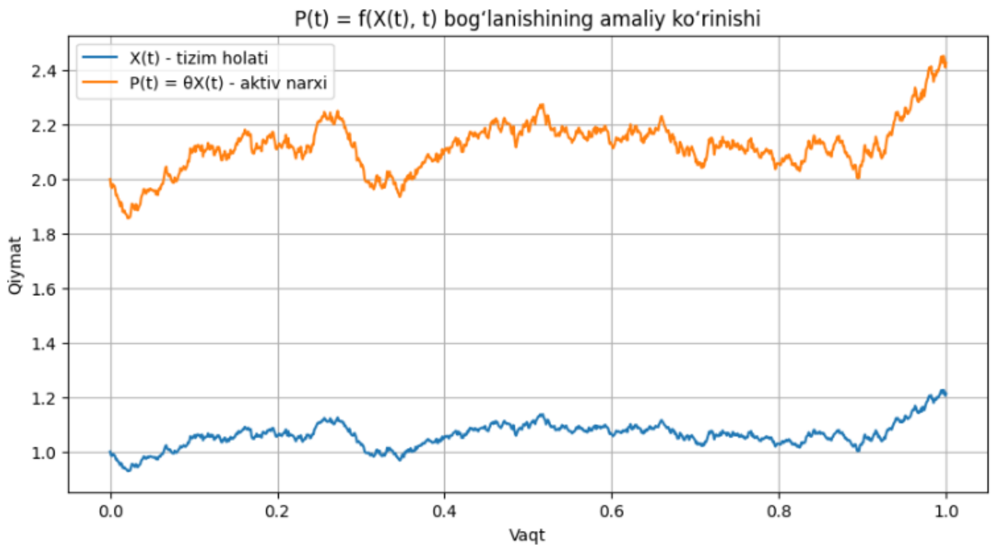
Quyidagi iqtisodiy jarayonni o'rganamiz:

$$dX_t = (\alpha X_t + \beta I_t)dt + \sigma(X_t + I_t)dW_t \quad (1)$$

bu yerda: X_t −bozor holati; I_t −investitsiya oqimi; σ −volatillik (tebranish, risk); W_t −Weiner jarayoni.

Adabiyotlar sharhi.

Yuqorida keltirilgan ifodada asosan diskret va tasodifiylik qismini ajratishimiz mumkin. Bu (1) tenglik bozor rejimini bildiradi. Agarda biz kiritgan investitsiyamiz hamisha o'sishni ta'minlasa yoki pasayishni u holda bizga (1) ning diskret qismi yetarli edi. Amaliyotda esa bu tubdan boshqacha, bozordagi kichkinagina tashqi tasodifiy ta'sir etuvchilar natijasida katta tebranishlar kuzatiladi. Ushbu maqsadda biz bu holatni asosan ikkita tashkil etuvchi diskret va uzluksiz orqali ifodalashni qabul etdik. Modelning tasodifiylik qismidagi risk (σ) , $(X_t + I_t)$ yig'indiga ko'paytirilmoqda. Bu degani bozor holatining o'zgarishiga aynan bozor holatining joriy vaqt momentidagi holati yoki investitsiya oqimi ta'sir etishi mumkinligini bildiradi. Umuman modelning tasodifiylik qismi real hayotda hisob kitob uchun murakkab bo'lgan elementlarni e'tiborga olishga yordam beradi. Faraz qilaylik $P(t) = f(X_t, t)$ bog'liq bo'lgan ixtiyoriy silliq uzluksiz kaminda kvadratli bilan differentsiallanuvchi funktsiya bo'lsin. Bu yerda bozor holatlari X_t nuqtali jarayon bo'lganligi sababli uni tasodifiy sonli funktsiya sifatida kiritamiz. Bu ikkita bog'liqli o'zgaruvchilarning amaliy bog'lanishini quyidagi rasmda ko'rishingiz mumkin (1-rasm).



1-rasm.

Bu rasmdan shuni ko'rish mumkinki aktiv narxi va holat o'rtasida faqatgina θ koeffitsientning o'zgarishi orqali tekis bog'liqlikni ko'ramiz (Абдуллаев, 2025). Keltirilgan amaliy misolda bog'lanish, tayinlangan aktiv narxi uchun bir yillik bozor holatlari va aktiv narxi o'rtasidagi bog'lanishlarni aks ettiruvchi mos $N = \overline{1, \dots, 1000}$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $\theta = 2.0$ parametrlar tanlandi. Natijada biz aktiv narxini shakllantiruvchi $P(t) = \theta f(X_t, t)$ tenglikni olamiz. Shuni e'tiborga olish zarurki, bu funktsiya tasodifiylik tashkil etuvchisiga ega. Savdo tizimida bozor holatlari bir holatdan ikkinchi holatga o'tishi ko'pgina tashqi tasodifiy omillarga bog'liq, ya'ni biron bir ehtimollik bilan keyingi holat paydo bo'ladi. Bu yerda Markov xususiyati ham bajariladi. Umuman olganda bizga ma'lumki bozor holatlari $\{o'suvchi, barqaror, pasayiuvchi\}$ ko'rinishida bo'ladi. Qaysidir ma'noda bu diskret holatni aniqlaydi, lekin biz bir holatdan ikkinchi holatga o'tishini aniq qat'iyat bilan ayta olmaymiz. Shuning uchun diskret holatdan uzluksizlik holatiga o'tishimizga tog'ri keladi. Buni shunday izohlash mumkinki ba'zi iqtisodiy o'zgaruvchilar normal taqsimotga ega. Masalan, narx bir qancha bog'liqsiz normal taqsimlangan tasodifiy kattaliklar yig'indisidan iborat. Bu albatda markaziy limit teoremasining natijasidir (Игнатьева, 2022). Savdo tizimida ishtirok etuvchi tasodifiy kattaliklarni normal taqsimlangan degan faraz bilan biz Gauss funktsiyasi orqali modellashtirishimiz mumkin (Абдуллаев, Отениязов, 2024). Yuqoridagilarni inobatga olib holat funktsiyasini uzluksiz silliq funktsiya va minimum kvadrati bilan differentsialanuvchi ekanligini inobatga olib uning uchun Ito formulasini tekshiramiz (Ito On,1951).

Tadqiqot metodologiyasi.

Berilgan $f(X_t, t)$ funktsiya uchun avvalo Ito lemmasini qo'llaymiz, natijada:

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t + I_t)^2 dt \quad (2)$$

bu tenglikda dX_t ning o'rniga (1) tenglikning o'ng tomonini qo'yadigan bo'lsak, u holda

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\big((\alpha X_t + \beta I_t)dt + \sigma(X_t + I_t)dW_t\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t + I_t)^2 dt =$$
$$\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}(\alpha X_t + \beta I_t)dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\sigma(X_t + +I_t)dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t + I_t)^2 dt \quad (3)$$

hosil bo'ladi. Endi Ito qoidasini qo'llab $(dX_t)^2$ ning quyidagicha aniqlanishini ko'rsatamiz:

$$(dX_t)^2 = ((\alpha X_t + \beta I_t)dt + \sigma(X_t + I_t)dW_t)^2 = (\alpha X_t + \beta I_t)^2(dt)^2 + 2(\alpha X_t + \beta I_t)dt\sigma(X_t + I_t)dW_t + (\sigma(X_t + I_t)dW_t)^2 = \sigma^2(X_t + I_t)^2 dt \quad (4)$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi yuqoridagi (3) va (4) tengliklardan $P(t)=\theta f(X_t,t)$ ifodadan foydalanib quyidagi umumiy tenglamani hosil qilamiz:

$$dP(t)=\theta df(X_t,t)=\theta\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}(\alpha X_t+\beta I_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t+I_t)^2\right)dt+\theta\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\sigma(X_t+I_t)dW_t \quad (5).$$

Bu tenglama (1) tenglikda aktiv narxining stoxastik differentsial tenglama orqali ifodalanishini asoslaydi. Natijaviy tenglamada ichki ta'sir etuvchilar X_t hamda tashqi ta'sir etuvchilar I_t ekanligini e'tiborga olish zarur. Ya'ni (1) tenglikning chap tomoni mikro darajadagi o'zgaruvchilarning o'zini o'zi tashkil etishi orqali, makro darajadagi o'zgaruvchilarning o'zini o'zi tashkil etishini ilmiy asoslash imkonini beradi.

Keling endi yuqorida keltirilgan (5) tenglikning matematik kutilmasini tahlil qilib chiqamiz. Matematik kutilma bizga o'rtacha o'sish, o'rtacha narx o'zgarishi kabi trendga bog'liq asosiy o'zgaruvchilarni tahlil qilish uchun muhim ahamiyat kasb etadi. Matematik kutilmani quyidagicha aniqlaymiz:

$$E[dP(t)]=E[\theta df(X_t,t)]=\theta E\left[\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}(\alpha X_t+\beta I_t)++\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t+I_t)^2\right)\right]dt+\theta E\left[\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\sigma(X_t+I_t)dW_t\right]=\theta E\left[\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}++\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}(\alpha X_t+\beta I_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t+I_t)^2\right)\right]dt \quad (6).$$

Dispersiyaning xossalaridan kelib chiqib biz (5) tasodifiy jarayon uchun hisoblaydigan bo'lsak, bu tenglikning faqat tasodifiy qismini olamiz chunki $Var(c)=0\ \ (c-cons't)$. U holda quyidagiga

$$Var\big(dP(t)\big)=Var(\theta df(X_t,t))=Var(\theta\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}(\alpha X_t+\beta I_t)++\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t+I_t)^2\right)dt+\theta\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\sigma(X_t+I_t)dW_t)=\theta^2\sigma^2E\left[(X_t++I_t)^2(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x})^2\right]dt \quad (7)$$

teng bo'ladi.

Savdo tizimida aktiv narxi investitsiya oqimi bilan shunday riskga nisbatan sezgirlik darajasi hisoblangan $\lambda>0$ musbat koeffitsient bilan shunday bog'langanki, bu bog'lanish asosan moliyaviy protfellar nazariyasida keng qo'llaniladi. Keling endi quyidagi investitsiya oqimiga bog'liq bo'lgan foyda funktsiyasini kiritamiz:

$$\Phi(X_t,I_t)=\ \theta E\left[\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}(\alpha X_t+\beta I_t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t+I_t)^2\right)\right]dt--\theta^2\sigma^2E\left[(X_t+I_t)^2(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x})^2\right]dt \quad (8)$$

mazkur funktsiyani I_t bo'yicha $max\Phi(I_t)$ talab etiladi.

Savdo tizimida bozor holatlari tayinlangan bo'lib, ya'ni diskretligidan foydalanib biz X_t ni ma'lum deb qabul qilamiz. Hamda aynan o'sha holatda I_t ning optimal qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun quyidagi funktsiyani tekshiramiz:

$$\pi(I_t)=\theta\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\beta I_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t+I_t)^2-\theta^2\sigma^2(X_t+I_t)^2\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\alpha X_t\}\ (9)$$

bu funktsiyada I_t dan boshqa tashkil etuvchilarni o'zgarmas deb (tayinlangan vaqt momentinda) birinchi tartibli differentsial olamiz:

$$\frac{\partial \pi(I_t)}{\partial I_t} = \theta \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\beta + \frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t + I_t) - 2\theta^2\sigma^2(X_t + I_t)\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2 \quad (10)$$

Soddalashtirish kiritilgandan so'ng (10) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{\partial \pi(I_t)}{\partial I_t} = \theta \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\beta + \sigma^2(X_t + I_t)\left(\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2} - \theta^2\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2\right) \quad (11)$$

bundan esa optimal investitsiya aniqlanadi:

$$I_t^{*} = -X_t + \frac{\theta\beta\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}}{\sigma^2\left(2\theta^2\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\right)} \quad (12)$$

bu yerda:

X_t —ayni t vaqtdagi bozor holati;

$f(X_t,t)$ —investitsiya oqimini ifodalovchi funktsiya;

σ —bozor holati yoki investitsiya ta'sirining riski;

β, θ —parametrlar.

Hosil bo'lgan (12) optimal investitsiya miqdori quyidagi iqtisodiy interpretatsiyani beradi:

1) Agar X_t katta bo'lsa, I_t manfiy bo'ladi bu degani bozor ko'tarilsa sotish kerak ekanligini bildiradi;
2) Agar X_t kichik bo'lsa, I_t musbat bo'ladi bunday holda sotib olish amali bajariladi.

Bunday yondashuv ba'zi savdo strategiyalar uchun o'rinlidir. Chunki risk cheksiz nolga yaqinlashsa ($\sigma \to 0$), investitsiya miqdorini cheksiz oshirish taklif etilmoqda ($I_t \to \infty$). Mantiqan qaralganda kapital cheklidir, investor esa katta riskga bormay investitsiya kiritadi. Shu sababli biz investitsiya miqdorining maksimal qiymatini aniqlab cheklashimizga to'gri keladi. Buning uchun 95% kvantil usulidan foydalanamiz, ya'ni:

$$|I_t| \le I_{max} = Q_{0.95}|I_t|, \quad t = 1 \dots T, \qquad (13).$$

Yuqorida olingan (12) ni (8) tenglikga qo'yib biz quyidagi foyda funktsiyasining maksimal qiymatini olamiz:

$$max\Phi(I^*{}_t) = \theta\left[\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\left(\alpha X_t + \beta(-X_t + + \frac{\theta\beta\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}}{\sigma^2\left(2\theta^2\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\right)}\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\left(\frac{\theta\beta\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}}{\sigma\left(2\theta^2\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\right)}\right)^2\right)\right] - -\theta^2\sigma^2\left[\left(\frac{\theta\beta\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}}{\sigma^2\left(2\theta^2\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\right)}\right)^2\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2\right]$$

(14).

Endi berilgan (1) tizim uchun HJB tenglamasini tuzish bosqichlarini amalga oshiramiz. Buning uchun yuqorida keltirilgan (8) funktsiyasini foydalanib quyida integralning chekli ekanligini ko'rsatamiz:

Faraz qilaylik, aktiv narxini ifodalovchi $f(X_t,t)$ funktsiyasi ikki marta differentsiallanuvchi va chekli hosilalarga ega uzluksiz funktsiya bo'lsin. Hamda $E(\alpha X_t + \beta I_t), E(X_t + I_t)^2$ kutilmalarning chekli ekanligini ko'rsatishimiz kerak bo'ladi. Endi ${X_t}^2$ jarayon uchun Ito lemmasini qo'llaymiz:

$$d\left({X_t}^2\right) = 2X_t dX_t + (dX_t)^2 \quad (15)$$

dX_t o'rniga (1) va $(dX_t)^2$ o'rniga esa (4)ni qo'yamiz. Natijada:

$$d\left({X_t}^2\right) = 2X_t(\alpha X_t + \beta I_t)dt + \sigma(X_t + I_t)dW_t + \sigma^2(X_t + I_t)^2 dt \quad (16)$$

Yuqoridagi (16) uchun matematik kutilmani olamiz:

$$E\left(d\left({X_t}^2\right)\right) = E(2\alpha {X_t}^2 + 2\beta X_t I_t + \sigma^2 (X_t + I_t)^2)dt) + E(\sigma(X_t + I_t)dW_t)$$

matematik kutilma va Ito xossasidan kelib chiqib quyidagicha baholaymiz:

$$E\left(d\left({X_t}^2\right)\right) \times \frac{1}{dt} = E\left(2\alpha {X_t}^2 + 2\beta X_t I_t + \sigma^2 (X_t + I_t)^2)\right) = E\left((2\alpha + \sigma^2){X_t}^2 + 2(\beta + \sigma^2) X_t I_t + \sigma^2 {I_t}^2\right) \leq (2\alpha + \sigma^2) E\left[{X_t}^2\right] + 2(\beta + \sigma^2) E[X_t I_t] + \sigma^2 E\left[{I_t}^2\right] \leq (2\alpha + \beta + 2\sigma^2) E\left[{X_t}^2\right] + (\beta + 2\sigma^2) E\left[{I_t}^2\right] \;\; (17)$$

Lemma (Gronwall-Bellman) (Chandra and Fleishman, 1970). Faraz qilaylik $u(t)$ va $v(t)$ funktsiyalar $[t_0, +\infty)$ oraliqda aniqlangan manfiy bo'lmagan uzluksiz funktsiyalar bo'lsin.

Agar quyidagi tengsizlik bajarilsa:

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} v(s)\, u(s) ds, \;\; t \geq t_0$$

bu yerda $c -$ musbat konstanta, u holda:

$$u(t) \leq c \times \exp\left\{\int_{t_0}^{t} v(s) ds\right\}, \quad t \geq t_0 .$$

Yuqoridagi lemmaga hamda (13)dagi bahoga asoslanib (17) ni baholaymiz:

$$E[{X_t}^2] \leq \exp\{(2\alpha + \beta + 2\sigma^2)t\}(E\left[{X_0}^2\right] + (\beta + 2\sigma^2)(I_{max})^2 t) \;\; (18).$$

Olingan natijadan holatning ikkinchi momenti chekli ekanligini bildiradi. Bundan esa:

$$E[(\alpha X_t + \beta I_t)^2] \leq 2(\alpha E\left[{X_t}^2\right] + \beta E\left[{I_t}^2\right]) < \infty$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa mantiqan $E[\alpha X_t + \beta I_t] \leq \sqrt{|E[(\alpha X_t + \beta I_t)^2]|^2} < \infty$ chekli ekanligi ko'rinadi.

Shunday qilib,

$$\int_t^T \Phi(X_t, I_t) dt < \infty.$$

HJB ni hosil qilish uchun quyidagicha qiymat funktsiyasini kiritamiz:

$$\Lambda(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \max_{I_t} \int_t^T \Phi(X_t, I_t) dt \;\; (19)$$

bu funktsiya bizga o'zini o'zi tashkil etuvchi savdo tizimida aktiv narxiga nisbatan yo'naltirilgan investitsiya oqimini optimal tartibga solish imkonini beradi. Endi aktiv narxini ifodalovchi $f(X_t, t)$ funktsiyasini Teylor qatoriga yoyamiz:

$$f(X_t + dX_t, t + dt) = f(X_t, t) + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial^2 x}(dX_t)^2 \;\; (20)$$

hosil bo'ladi. Tizim dinamikasini (20) dagi dX_t ning o'rniga qo'yamiz natijada:

$$f(X_t + dX_t, t + dt) = f(X_t, t) + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}((\alpha X_t + \beta I_t)dt + \sigma(X_t + I_t)dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial^2 x}((\alpha X_t + \beta I_t)dt + \sigma(X_t + I_t)dW_t)^2$$

tenglik paydo bo'ladi. Endi $(dW_t)^2 = dt$, ekanligini hamda (4) tenglikni inobatga olib Teylor qatorni quyidagicha shakllantiramiz:

$$f(X_t + dX_t, t + dt) = f(X_t, t) + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t}dt + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}(\alpha X_t + \beta I_t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial^2 x}\sigma^2(X_t + I_t)^2 dt \quad (21).$$

Yuqoridagi (21) Teylor qatori aynan Ito lemmasining diskret qismi ekanligini yana bir bor ko'rishimiz mumkin. Natijada HJB tenglama quyidagicha aniqlanadi:

$$0 = \max_{I_t}\left[\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}(\alpha X_t + \beta I_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(X_t,t)}{\partial x^2}\sigma^2(X_t + I_t)^2 - \theta^2\sigma^2(X_t + I_t)^2\left(\frac{\partial f(X_t,t)}{\partial x}\right)^2\right] \quad (22).$$

Yuqorida hosil bo'lgan (22) HJB tenglamasining analitik yechimi aynan (12) optimal investitsiya ${I^*}_t$ yechimi bilan ustma ust tushadi.

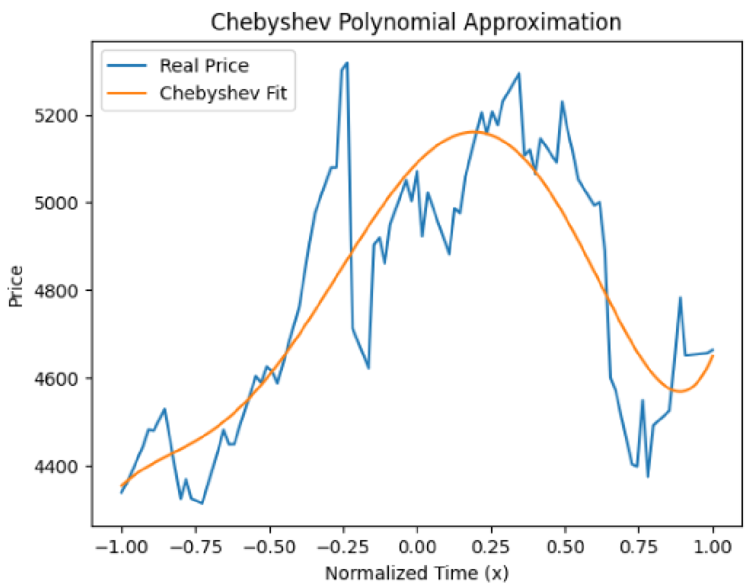
Tahlil va natijalar muhokamasi.

Bozor holatini ifodalovchi uzluksiz silliq, kaminda ikki marta differentsiyallanuvchi $f(X_t, t)$ funktsiyani $[-1; 1]$ oraliqda Chebishev polinomiga yaqinlashtirish mumkin. Bu aynan Chebyshev toeremasining natijasidir. Keling endi aktiv narxining o'zgarishi vaqtini $[-1; 1]$ oraliqqa quyidagi normalizatsiya formulasi orqali o'tkazamiz:

$$x = \frac{2(t - t_{min})}{t_{max} - t_{min}} - 1.$$

Normalizatsiya bajarilganidan so'ng xomashyo tovar narxini shakllantirishning python 3.9 kodini yozamiz va bu kod orqali 90 kunlik ma'lumotni shakllantiramiz[1].

Chebishev polinomi va aktiv narxining approximatsiyasini quyidagi rasmda ko'rishingiz mumkin:



Hisob kitoblar natijasida Chebishev polinomining hadlari quyidagi qiymatlarni qabul qidi (1-jadval):

[1] Ma'lumotlar test rejimida ishlatildi.

1-jadval

Chebishev polinomi koeffitsientlarining qiymatlari hamda bazislari quyidagicha aniqlandi

a_0 T_0	a_1 T_1	a_2 T_2	a_3 T_3	a_4 T_4	a_5 T_5
4703.82616605 1	147.84764655 x	-315.13932 $2x^2-1$	-57.562336 $4x^2-3x$	93.61307814 $8x^4-8x^2+1$	52.389381 $16x^5 - 20x^3+5x$

Eslatma: *yuqoridagi 90 kunlik ma'lumotlar asosida*

Barcha qiymatlarni joy-joylariga qo'yib soddalashtirilgandan so'ng, aktiv narxini ifodalovchi 5-darajali Chebishev polinomini hosil qilamiz:

$$f(X_t,t) \approx \sum_{k=0}^{5} a_k T_k(x) = 5112.58 + 582.48x - 1379.18x^2 - 1278.04x^3 + 748.90x^4 + 838.23x^5 \quad (23).$$

Xulosa va takliflar.

Olingan bu (3.2.23) ni (3.2.22) ga qo'yish orqali (12) dagi optimal investitsiya miqdorining aktiv narxiga bog'liq ifodasini olamiz.

Olingan ifodada noma'lum parametrlarni α, θ parametrlarni regressiya tenglamasi orqali baholaymiz. Bundan esa investitsiya miqdorining prognoz qiymatlarini olish imkoniyati tug'uladi.

Adabiyotlar / Литература / Reference:

Chandra J. and Fleishman B.A. (1970) On a Generalization of the Gronwall-Bellman Lemma in Partially Ordered Banach Spaces. J. Math Anal. Appl., 31, 668–681.

Ito K. On (1951) Stochastic Differential Equations // Memories, American Mathematical Society. – Vol. 4. – P. 1-51.

Абдуллаев У.А. (2025) Эконометрическое моделирование самоорганизующейся торговой системы с использованием карты кохонена. Вестник КАнРУз. № 3. С. 56-60.

Абдуллаев У.А., Отениязов Е.Т. (2024) Об возможности математического моделирования системы самоорганизации. Международная конференция системный анализ: Моделирование и управление посвященная памяти академика А. В. Кряжимского Москва, 23–24 января. Тезисы докладов. Стр. 30-32

Игнатьева, Д. С. (2022) Теория вероятностей и ее применение в области экономики / Д. С. Игнатьева, И. А. Филиппова. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. № 22 (417). — С. 176-178. — URL: https://moluch.ru/archive/417/92069.